I vettori

Grandezze **scalari** e grandezze **vettoriali**

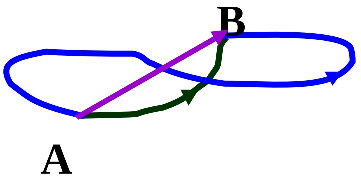
Vettore: ente matematico caratterizzato da tre quantità

modulo
direzione
verso

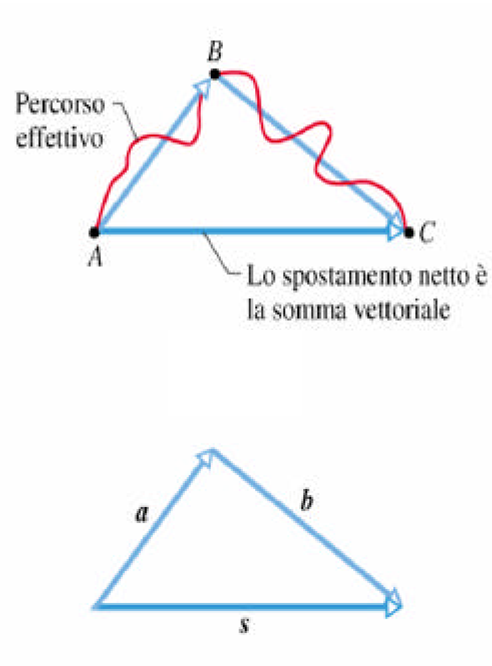
I vettori sono applicati in un punto (esiste un numero infinito di **vettori equipollenti**, cioé con modulo, direzione e verso uguali, ma applicati in punti diversi).

Equazioni scalari } **non vanno mescolate**

Equazioni vettoriali



Somma di vettori



Equazione vettoriale che definisce il **vettore somma**

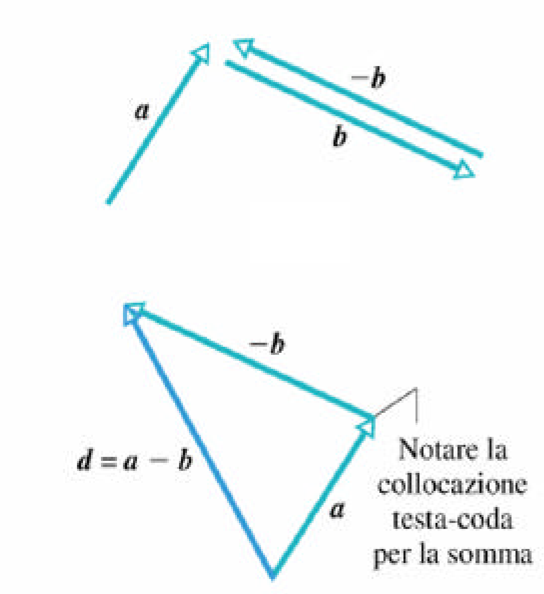
$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

Proprietà commutativa

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Proprietà associativa

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$



$-\vec{b}$ è un vettore con modulo e direzione uguali al vettore $\vec{b}$, ma orientato in verso opposto, quindi

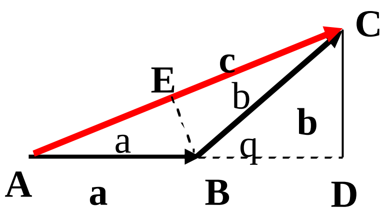
$$\vec{b} + (-\vec{b}) = 0$$

Possiamo ora definire la differenza di due vettori come la somma di un vettore con l'opposto dell'altro

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

Calcolo del vettore somma



$$(\overline{A}\,\overline{C})^2 = (\overline{A}\,\overline{D})^2 + (\overline{D}\,\overline{C})^2$$

$$\overline{A}\,\overline{D} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{B}\,\overline{D} = a + b\cos q$$

$$\overline{D}\,\overline{C} = b\sin J$$

$$c^2 = (a + b\cos q)^2 + b^2\sin^2 q = a^2 + b^2 + 2ab\cos q$$

La direzione di $\vec{c}$ è determinata dall'angolo α

$$c\sin a = b\sin q$$

$$\frac{c}{\sin q} = \frac{b}{\sin a} = \frac{a}{\sin b}$$

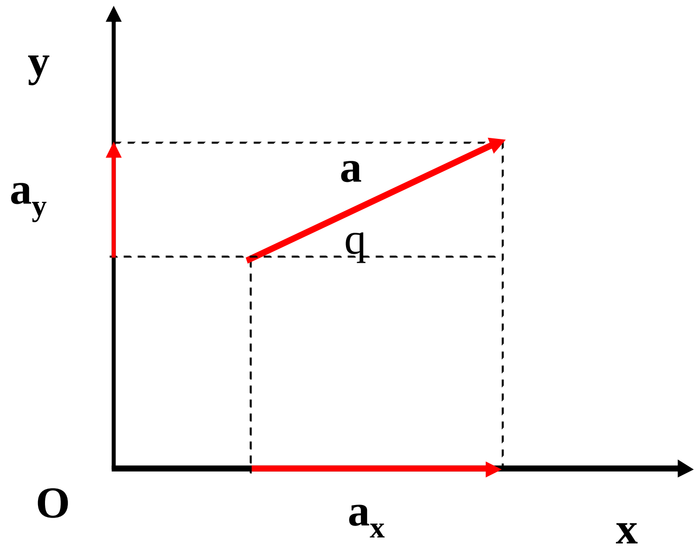
$$|\vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}$$

$$tg\ a = \frac{b}{a}$$

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono ^

Vettori e loro componenti

La **componente** di un vettore è la sua proiezione su un asse; $\mathbf{a_x}$ e $\mathbf{a_y}$. **Scomposizione di un vettore**.

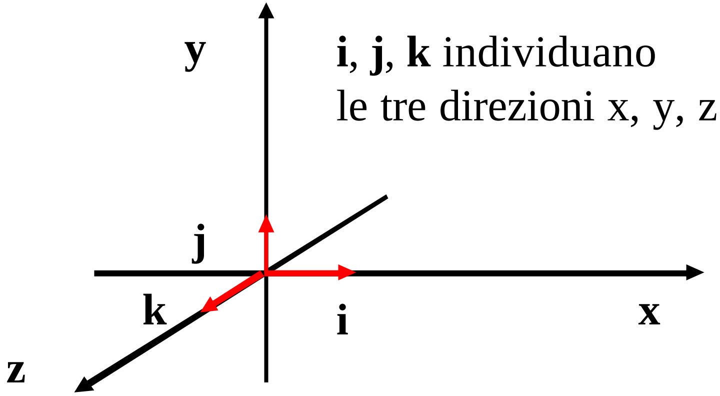


$$a_x = a \cos q$$
$$a_y = a \sin q$$
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$
$$tg\, q = \frac{a_y}{a_x}$$

Vettori unitari

Un **vettore unitario** è detto **versore** ed è un vettore di **modulo = 1**, utilizzato per individuare una particolare direzione.

Sistema destrorso di coordinate cartesiane ortogonali



i, **j**, **k** individuano le tre direzioni x, y, z

A volte vengono anche utilizzati i nomi $\mathbf{u_x}$, $\mathbf{u_y}$, $\mathbf{u_z}$

Prodotti di vettori

- Prodotto di un **vettore per uno scalare** $\rightarrow$ **vettore**
- **Prodotto tra vettori**

Prodotto **scalare** $\rightarrow$ **scalare**
Prodotto **vettoriale** $\rightarrow$ **vettore**

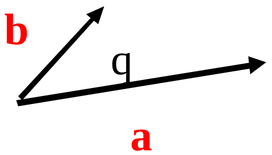
Prodotto di un vettore per uno scalare

Moltiplicando un vettore **a** per uno scalare s, si ha un nuovo vettore **b**, multiplo di **a**, con direzione uguale a quella di **a** e verso determinato dal segno di s.

$$\mathbf{b} = s\mathbf{a}$$

Prodotto scalare

Il prodotto scalare dei vettori **a** e **b** è uno scalare definito dall’espressione



a•b = abcosθ

La scelta dell’angolo è irrilevante essendo cosθ uguale a cos(2π – θ).
Il p. s. può essere visto come il prodotto del modulo del vettore **a** per la proiezione del vettore **b** lungo la direzione di **a** e viceversa.

Perpendicolarità di due vettori → **a•b** = 0 se **a** ⊥ **b**

Modulo del vettore → **a•a** = a^2

Non ha senso iterare il prodotto scalare

Proprietà commutativa → **a•b** = **b•a**

Proprietà distributiva → **a•R** = **a•(b+c) = a •b +a •c**

Se **c = a +b** → (teorema di Carnot o del coseno)

$$c^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{a} \bullet \vec{a} + \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{b} \bullet \vec{a} + \vec{b} \bullet \vec{b} =$$
$$= a^2 + b^2 + 2\vec{a} \bullet \vec{b} = a^2 + b^2 + 2ab\cos q$$

Possiamo ora esprimere un **vettore qualunque** come **somma delle sue componenti** secondo un dato sistema di riferimento

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

$a_x\vec{i}$, $a_y\vec{j}$ e $a_z\vec{k}$ sono dette **componenti vettoriali** di **a**

scalare è invariante rispetto al sistema di riferimento

vettore è invariante rispetto al sistema di riferimento

Le **componenti di un vettore non** sono invarianti

Esse non variano per traslazione, si trasformano per rotazione $\rightarrow$ non sono **né vettori né scalari***

Scelta arbitraria del sistema di riferimento

Invarianza delle leggi fisiche

Per la somma di due vettori **a** e **b** otteniamo $\Rightarrow$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$
$$c_x = a_x + b_x$$
$$c_y = a_y + b_y$$
$$c_z = a_z + b_z$$

*Le componenti sono dei veri e propri vettori quando sono visti di per sé, senza relazione con il vettore originario, come vedremo per il moto dei proiettili.

Infine, utilizzando le componenti, otteniamo

$$
\begin{aligned}
&\vec{a} \bullet \vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\right) \bullet \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right) = \\
&= a_x \vec{i} \bullet b_x \vec{i} + a_x \vec{i} \bullet b_y \vec{j} + a_x \vec{i} \bullet b_z \vec{k} + a_y \vec{j} \bullet b_x \vec{i} + a_y \vec{j} \bullet b_y \vec{j} + \\
&+ a_y \vec{j} \bullet b_z \vec{k} + a_z \vec{k} \bullet b_x \vec{i} + a_z \vec{k} \bullet b_y \vec{j} + a_z \vec{k} \bullet b_z \vec{k} = \\
&= a_x b_x \vec{i} \bullet \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \bullet \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \bullet \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \bullet \vec{i} + \\
&a_y b_y \vec{j} \bullet \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \bullet \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \bullet \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \bullet \vec{j} + \\
&+ a_z b_z \vec{k} \bullet \vec{k} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z
\end{aligned}
$$

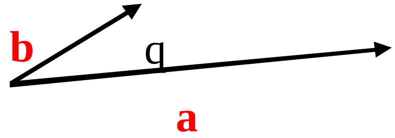
Quindi

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale dei vettori **a** e **b** è un vettore **c** il cui modulo è definito dall'espressione

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = ab\sin\theta$$



La scelta dell'angolo **è rilevante** essendo $\sin\theta = -\sin(2\pi - \theta)$.
La **direzione** del vettore risultante **c** è determinata con la regola della **mano destra**:
il pollice coincide con il vettore **c,** l'indice con il vettore **a** e il medio con il vettore **b.** Il vettore risultante **c** è **sempre perpendicolare** al piano determinato dai vettori **a** e **b**

Proprietà del prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale può essere visto come l'**area** del parallelogramma di lati **a** e **b** → **area può essere vista come un vettore**

Parallelismo di due vettori → **a×b** = 0 se **a** è || a **b**

E' anticommutativo → **a×b** = **- b×a**

Proprietà distributiva → **a×R** = **a**×**(b+c) = a×b +a×c**

Proprietà associativa → **a ×(b ×c**) ≠ (**a ×b) ×c**
quindi **ha senso iterare** il prodotto vettoriale, ma la **proprietà associativa non vale**.

Infine, utilizzando le componenti, otteniamo

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\right) \times \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right) =$$
$$= a_x \vec{i} \times b_x \vec{i} + a_x \vec{i} \times b_y \vec{j} + a_x \vec{i} \times b_z \vec{k} + a_y \vec{j} \times b_x \vec{i} + a_y \vec{j} \times b_y \vec{j} +$$
$$+ a_y \vec{j} \times b_z \vec{k} + a_z \vec{k} \times b_x \vec{i} + a_z \vec{k} \times b_y \vec{j} + a_z \vec{k} \times b_z \vec{k} =$$
$$= a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} =$$
$$\left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}$$

Infatti è

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0, \ \vec{j} \times \vec{j} = 0, \ \vec{k} \times \vec{k} = 0$$
$$\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}$$
$$\vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}$$
$$\vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}$$

Ovvero

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$