DERIVATA DELLE FUNZIONI SENO E COSENO

G. Mezzetti

Calcoliamo la derivata delle funzioni $\sin(x)$ e $\cos(x)$ senza usare le formule di prostaferesi (che invece il libro di testo usa). Per fare questo, bisogna innanzitutto calcolare un limite che serve poi nel calcolo delle derivate.

1. Esercizio. Risulta
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0.$$

Risoluzione. Il limite da calcolare si presenta come una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Osserviamo innanzitutto che, siccome
$$\lim_{x\to 0}\Big(\cos(x)+1\Big) = \cos(0)+1 = 1+1 = 2 > 0,$$
per il teorema della permanenza del segno (diretto) esiste un intorno I di 0 tale che $\forall x \in I \quad \cos(x)+1 > 0$. Nel fare un limite per $x \to 0$, non è restrittivo supporre che x appartenga a tale intorno I, e dunque che $\cos(x)+1 \neq 0$: ciò giustifica il primo passaggio del calcolo seguente.
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x}\cdot\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\big(\cos(x)-1\big)\big(\cos(x)+1\big)}{x\,\big(\cos(x)+1\big)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)-1}{x\,\big(\cos(x)+1\big)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2(x)}{x\,\big(\cos(x)+1\big)} \\
&= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}\cdot\frac{\sin(x)}{x}\right) \\
&= -\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right) = \dots
\end{aligned}$$
Nell'ultima riga, il primo dei due limiti non è più una forma indeterminata, e il secondo è un limite notevole, per cui il calcolo può continuare così:
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} &= \dots = -\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right) \\
&= -\frac{\sin(0)}{\cos(0)+1}\cdot 1 = -\frac{0}{1+1}\cdot 1 = 0,
\end{aligned}$$
come voluto. □

Ci serviranno anche le **formule di addizione** per seno e coseno, che ricordiamo:
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta),$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

2. Calcoliamo ora la derivata della funzione seno in un arbitrario punto $x \in \mathbb{R}$; per definizione, bisogna calcolare il limite, per $h \to 0$, del rapporto incrementale di punto iniziale x. Facciamolo:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\big(\cos(h)-1\big)+\cos(x)\sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin(x)\big(\cos(h)-1\big)}{h} + \frac{\cos(x)\sin(h)}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\big(\cos(h)-1\big)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\sin(h)}{h} = \dots
\end{aligned}$$

Osserviamo ora che, poiché x è fissato, $\sin(x)$ e $\cos(x)$ sono costanti al tendere di h a zero, e si possono dunque "portare fuori" dai limiti; allora, ricordando anche l'esercizio 1 e il solito limite notevole $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$, si continua così:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \dots = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\big(\cos(h)-1\big)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\sin(h)}{h} \\
&= \sin(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
&= \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 = \boxed{\cos(x).}
\end{aligned}$$

Ripetiamo la conclusione:

$$\boxed{D \, \sin(x) = \cos(x).}$$

3. Calcoliamo poi la derivata della funzione coseno in un arbitrario punto $x \in \mathbb{R}$; anche qui si fa il limite, per $h \to 0$, del suo rapporto incrementale di punto iniziale x. Il conto è del tutto analogo a quello appena visto:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\big(\cos(h)-1\big)-\sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\cos(x)\big(\cos(h)-1\big)}{h} - \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\big(\cos(h)-1\big)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} = \dots
\end{aligned}$$

Esattamente come prima, poiché x è fissato, $\sin(x)$ e $\cos(x)$ sono costanti al tendere di h a zero e si possono "portare fuori" dai limiti; si continua dunque così, sfruttando i medesimi due limiti per $h \to 0$ già utilizzati prima:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \dots = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\big(\cos(h)-1\big)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x) \cdot 0 - \sin(x) \cdot 1 = \boxed{-\sin(x).}
\end{aligned}$$

Ripetiamo la conclusione:

$$\boxed{D \, \cos(x) = -\sin(x).}$$

Alternativamente, la formula della derivata del coseno può anche essere ricavata da quella della derivata del seno, come vedremo dopo aver studiato la regola di derivazione delle funzioni composte.