EQUAZIONI CARTESIANE DELLA CIRCONFERENZA

G. MEZZETTI

Definizione. Siano dati un punto C e un numero $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$; si dice **circonferenza di centro** C **e raggio** r l'insieme di quei punti del piano la cui distanza da C è uguale a r.

Diciamo che il punto (fisso) C, centro della circonferenza, abbia coordinate (p, q), e indichiamo con (x, y) le coordinate di un generico punto P del piano (vedi fig. 1). In base alla definizione, il punto P sta sulla circonferenza di centro C e raggio r se e solo se

$$\mathrm{dist}(P, C) = r,$$

cioè, ricordando la formula per la distanza tra due punti,

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = r. \tag{1}$$

Poiché la (1) è una uguaglianza fra due quantità certamente non negative (ricordiamo che stiamo supponendo $r \geq 0$), essa equivale all'uguaglianza dei due membri elevati al quadrato:

$$\boxed{(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.} \tag{2}$$

Quest'ultima equazione può anche essere ricavata direttamente, senza menzionare esplicitamente la formula della distanza tra due punti, applicando il teorema di Pitagora al triangolo colorato della fig. 1.

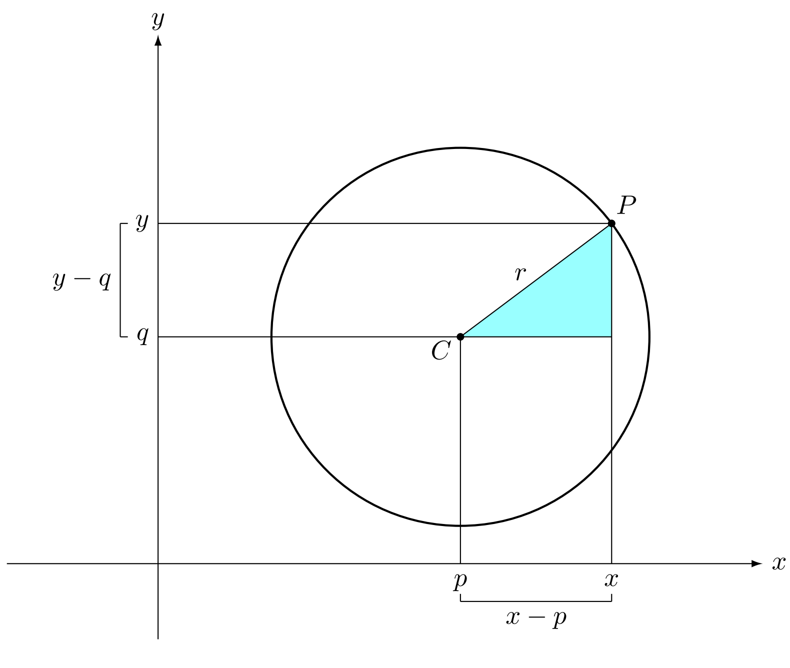

FIGURA 1. Circonferenza di centro $C = (p, q)$ e raggio r

La (2), nelle incognite x e y, è già un'equazione soddisfatta da tutte e sole le coppie di valori che sono coordinate di un punto della circonferenza di centro $C = (p, q)$ e raggio r; cioè, è già un'equazione della circonferenza. Essa può essere riscritta in altre forme, e ne vedremo tra poco una abbastanza usata, ma la forma (2) è quella migliore per riconoscere le caratteristiche geometriche della circonferenza, dato che consente di "leggere" immediatamente qual è il centro e qual è il raggio. Per esempio, se viene data l'equazione

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 9,$$

dal confronto con la forma generale (2) si riconosce immediatamente che il centro è il punto $(2, 5)$ e che il raggio è 3 (perché $9 = 3^2$); e vedendo l'equazione

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5,$$

che può essere riscritta come

$$\big(x-(-1)\big)^2 + \big(y-2\big)^2 = (\sqrt{5})^2,$$

si riconosce, allo stesso modo, che essa rappresenta la circonferenza di centro $(-1, 2)$ e raggio $\sqrt{5}$.

È degno di menzione il caso particolare in cui il centro della circonferenza coincide con l'origine degli assi cartesiani: in questo caso $p = q = 0$ e la (2) diventa

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Come già accennato, la (2) si trova abbastanza spesso scritta in un'altra forma, nella quale, semplicemente, si sviluppano i quadrati delle parentesi. Partendo dalla (2) e facendo ciò, si ottiene

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 = r^2,$$

ovvero, riordinando i termini,

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0. \tag{3}$$

Se a questo punto poniamo

$$a = -2p, \tag{4}$$

$$b = -2q, \tag{5}$$

$$c = p^2 + q^2 - r^2, \tag{6}$$

la (3), cioè la (2), può essere riscritta nella forma

$$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.} \tag{7}$$

La (7) è ancora un'equazione della medesima circonferenza di centro $C = (p, q)$ e raggio r, ma stavolta i tre numeri a, b e c che vi compaiono sono legati alle coordinate di C e a r in modo "offuscato", tramite le tre relazioni (4), (5) e (6). Chiameremo la (7) la **forma canonica** dell'equazione della circonferenza; il suo — discutibile — vantaggio è che in essa non compaiono parentesi elevate al quadrato.[1]

Esercizio 1. Scrivere, in forma canonica, l'equazione della circonferenza di centro $(2, -3)$ e raggio 1.

[1] La (7) è la forma scolastica dell'equazione della circonferenza, e si sa che a scuola non sempre le cose vengono fatte nel modo più sensato. Qualunque persona sensata, dovendo scrivere l'equazione di una circonferenza di centro e raggio dati, userà la forma (2). Vi è in realtà una ragione che rende interessante la forma (7), ma non è il caso di spiegarla qui.

Soluzione. Possiamo risolvere questo esercizio in due modi leggermente diversi: possiamo scrivere l'equazione nella forma (2) e sviluppare i quadrati, o possiamo usare direttamente la forma (7) e ricavare a, b e c in base alle (4), (5) e (6).

Primo modo. L'equazione nella forma (2) è

$$\bigl(x-2\bigr)^2 + \bigl(y-(-3)\bigr)^2 = 1^2,$$

cioè

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1;$$

sviluppando i quadrati si ottiene

$$\begin{gathered} x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 1; \\ x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + 9 - 1 = 0; \\ \boxed{x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0.} \end{gathered}$$

L'ultima equazione scritta è nella forma richiesta; si può dunque vedere che $a = -4$, $b = 6$ e $c = 12$.

Secondo modo. Dalle (4), (5) e (6) e dai dati del problema ($p = 2$, $q = -3$ e $r = 1$) si ricava

$$\begin{aligned} &a = -2p = -4, \\ &b = -2q = 6, \\ &c = p^2 + q^2 - r^2 = 4 + 9 - 1 = 12; \end{aligned}$$

inserendo questi valori nella (7) si ritrova ovviamente la stessa equazione:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0.}$$ □

L'esercizio 1 chiedeva di ricavare l'equazione canonica a partire dalle caratteristiche geometriche della circonferenza (centro e raggio); naturalmente, ci possiamo porre anche il problema inverso di ricavare centro e raggio di una circonferenza a partire dalla sua equazione canonica.

Supponiamo dunque *data* un'equazione della forma (7)

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

e proponiamoci di trovare, ammesso che sia possibile, le coordinate (p, q) del centro e il raggio r della circonferenza che essa rappresenta; abbiamo detto «ammesso che sia possibile» perché vedremo che in realtà non è sempre vero che un'equazione della forma (7) rappresenta una circonferenza.[2] Possiamo usare le relazioni (4), (5) e (6), nelle quali, però, riguardiamo a, b e c come dati e p, q ed r come incognite. Da (4) e (5) si ricava subito che $p = -a/2, \;\; q = -b/2$; inserendo questi valori nella (6) si ha poi che

$$c = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - r^2,$$

cioè

(8) $$r^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c.$$

Ora, *se* risulta $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \geq 0$, possiamo ricavare r dalla (8) estraendo la radice quadrata; ma se invece $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c < 0$, il problema posto non ha soluzione e l'equazione data *non* rappresenta una circonferenza (a punti reali).

[2] Stiamo parlando di circonferenze a punti reali; ma noi non sappiamo nemmeno cosa siano i punti non reali, per cui. . .

Ricapitoliamo quanto abbiamo trovato: le formule per ricavare p, q ed r da a, b e c (cioè, il centro e il raggio dall'equazione canonica) sono le seguenti:

$$\begin{aligned} p &= -\frac{a}{2}, \\ q &= -\frac{b}{2}, \\ r &= \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}, \qquad \text{a patto che } \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c \geq 0; \end{aligned} \tag{9}$$

se invece $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c<0$, l'equazione data *non* rappresenta una circonferenza. Attenzione a non fare confusione: è vero che ogni circonferenza può essere rappresentata da un'equazione della forma (7), ma non è vero che, viceversa, ogni equazione della forma (7) rappresenti una circonferenza.[3]

Non è indispensabile imparare le formule (9) a memoria: il problema di trovare centro e raggio data l'equazione canonica può anche essere risolto "a intuito", come vedremo negli esercizi seguenti.

Esercizio 2. Trovare, se possibile, centro e raggio della circonferenza di equazione

$$x^2+y^2-2x+6y-1=0.$$

Soluzione. Vediamo prima la risoluzione di un alunno che si è imparato a memoria le formule (9). Be', non c'è che da applicarle, sapendo che $a=-2$, $b=6$ e $c=-1$:

$$\begin{aligned} p &= -\frac{-2}{2} = 1, \\ q &= -\frac{6}{2} = -3, \\ r &= \sqrt{\frac{4}{4}+\frac{36}{4}+1} = \sqrt{11}, \end{aligned}$$

visto che la condizione $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c \geq 0$ è soddisfatta. Pertanto il centro è il punto $C=(1,-3)$ e il raggio è $r=\sqrt{11}$.

Supponiamo adesso di non ricordarci le formule (9); possiamo risolvere lo stesso il problema riconducendo l'equazione data alla forma (2) mediante il procedimento del completamento dei quadrati. Riscriviamo cioè l'equazione data nella forma

$$x^2-2x+\ldots+y^2+6y+\ldots-1=???, \tag{10}$$

dove al posto dei puntini dobbiamo scrivere dei numeri opportunamente scelti in modo da completare dei quadrati di binomi; naturalmente, se ci limitassimo ad aggiungere tali numeri al primo membro, altereremmo l'equazione data, per cui, per bilanciare, dovremo aggiungere le stesse quantità al secondo membro. Ecco perché, a secondo membro, non abbiamo più scritto 0, ma la quantità sconosciuta ???.

Come si sa dalla prima classe, l'unico quadrato di binomio che comincia con x^2-2x è $(x-1)^2=x^2-2x+1$, e l'unico quadrato di binomio che comincia con x^2+6x è $(x+3)^2=x^2+6x+9$; pertanto, la (10) si dovrà completare così:

$$x^2-2x+1+y^2+6y+9-1=1+9,$$

cioè

$$(x-1)^2+(y+3)^2=1+1+9,$$

cioè ancora

$$\big(x-1\big)^2+\big(y-(-3)\big)^2=11.$$

Da qui si ritrova subito che il centro è $(1,-3)$ e il raggio è $\sqrt{11}$. □

[3] Si confronti con il classico «tutti gli uomini sono bipedi, ma non tutti i bipedi sono uomini».

Esercizio 3. Trovare, se possibile, centro e raggio della circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 + x = 0.$$

Soluzione. Qui $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$. Notiamo che $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = \frac{1}{4} \geq 0$, quindi il problema posto ha soluzione. Applicando le (9) troviamo

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{2}, \\ q &= 0, \\ r &= \sqrt{\frac{1}{4} + 0 - 0} = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

quindi il centro è il punto $C = (-\frac{1}{2}, 0)$ e il raggio è $r = \frac{1}{2}$.

Anche qui, possiamo invece applicare il completamento dei quadrati. Il quadrato che inizia con $x^2 + x$ è $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$ (vedi nota[4]); e $y^2 = (y - 0)^2$ è già un quadrato di binomio. Per farla breve, l'equazione data si può riscrivere nella forma

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4},$$

cioè

$$\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

e da qui si vede subito che il centro è $(-\frac{1}{2}, 0)$ e il raggio è $\frac{1}{2}$. □

Esercizio 4. Trovare, se possibile, centro e raggio della circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 + 3x - y + 5 = 0.$$

Soluzione. I dati sono $a = 3$, $b = -1$, $c = 5$. Stavolta risulta

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} - 5 = \frac{9 + 1 - 20}{4} = -\frac{10}{4} < 0,$$

per cui il problema posto non ha soluzione: si risponde che l'equazione data *non* rappresenta una circonferenza (a punti reali). Notiamo che se avessimo ciecamente applicato le formule (9), giunti al punto di trovare r ci saremmo trovati a tentare di estrarre la radice quadrata di un numero negativo, e a quel punto ci saremmo in ogni caso accorti (non è vero?!) che il problema dato era impossibile. □

---

[4] Si ricordi che la chiave per completare il quadrato che comincia con $x^2 + ax$ è ricordarsi che il termine ax dev'essere il doppio prodotto, per cui va riscritto nella forma $ax = 2px$ con p un numero opportuno; fatto questo, il quadrato da completare $x^2 + ax$ risulta scritto nella forma $x^2 + 2px$, e da qui è facile capire che il completamento sarà $x^2 + 2px + p^2 = (x + p)^2$; e analogamente si procede con $y^2 + by$. Nel nostro caso avremo, per i termini in x:

$$x^2 + x = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \qquad (\text{cioè, } p = \tfrac{1}{2});$$

il completamento sarà dunque:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$