Ist. mag. «Duca d'Aosta» di Padova A.s. 2011–2012 — Cl. 1H

**II p.s. — Simulazione della II prova scritta di Matematica**

30 aprile 2012

# Traccia unica

Rispondere ai seguenti 2 quesiti, indicando per esteso i passaggi attraverso cui si giunge alla soluzione (le risposte non corredate da adeguate spiegazioni non verranno prese in considerazione). Si consiglia di affrontare il quesito 2 solo dopo aver risolto tutti gli altri esercizi.

**1 (1 punto per ciascun sottoquesito).** Scomporre i seguenti 7 polinomi nel maggior numero possibile di fattori di grado non nullo. (A fianco di ogni polinomio viene indicato il numero dei fattori della risposta attesa; un fattore elevato a un esponente $n$ conta, com'è logico, come $n$ fattori; per esempio, se per un certo polinomio la scomposizione attesa fosse $(x-y)^2(a^2+b)^3$, ci sarebbe scritto a fianco "[5 fattori]": $(x-y)^2$ conta come 2 fattori, e $(a^2+b)^3$ conta come 3 fattori.)

(*1*) $ax + a - bx - b - 2cx - 2c$ [2 fattori];

(*2*) $a^2x^2 - a^2 - 3ax^2 + 3a$ [4 fattori];

(*3*) $\dfrac{8}{27}a^4x - 2a^3x + \dfrac{9}{2}a^2x - \dfrac{27}{8}ax$ [5 fattori];

(*4*) $x^2 + 2xy + y^2 - a^2 + 2ab - b^2$ [2 fattori];

(*5*) $x^2 - x - 2$ [2 fattori];

(*6*) $\dfrac{x^3y^3}{8} + 1$ [2 fattori];

(*7*) $a^2y + 4x^2y + 9y + 4axy - 6ay - 12xy$ [3 fattori].

**2 (1 punto).** Il polinomio $x^2+1$ può essere scomposto nel prodotto di polinomi nell'indeterminata $x$ a coefficienti razionali? Motivare rigorosamente la risposta (dare cioè una dimostrazione rigorosa di quanto affermato).

Tempo nominale per la prova: 1 ora scolastica. Voto minimo 2, voto massimo 10, sufficienza 6. Per ottenere il proprio voto, sommare i punteggi degli esercizi svolti correttamente e aggiungere 2.

*Nota bene:* questa simulazione dev'essere intesa come supplemento alla normale preparazione, e non come sostituzione della stessa; va quindi eseguita come esercizio finale, *dopo* aver svolto un buon numero di esercizi ordinari su tutti i tipi di scomposizioni studiate.

# Soluzione

**Quesito 1.** Per esigenze di spazio, l'applicazione dei prodotti notevoli è esposta in modo sintetico, ma comunque in maniera tale da consentire di ricostruire senza equivoci la regola applicata.

$$(1)\quad ax+a-bx-b-2cx-2c = a(x+1)-b(x+1)-2c(x+1) = \boxed{(x+1)(a-b-2c).}$$

$$(2)\quad a^2x^2-a^2-3ax^2+3a = a(ax^2-a-3x^2+3) = a\Big(a(x^2-1)-3(x^2-1)\Big)$$
$$= a\Big((x^2-1)(a-3)\Big) = a\Big((x+1)(x-1)(a-3)\Big) = \boxed{a(x+1)(x-1)(a-3).}$$

$$(3)\quad \frac{8}{27}a^4x-2a^3x+\frac{9}{2}a^2x-\frac{27}{8}ax = ax\left(\frac{8}{27}a^3-2a^2+\frac{9}{2}a-\frac{27}{8}\right)$$
$$= ax\left(\left(\frac{2}{3}a\right)^3+3\cdot\left(\frac{2}{3}a\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+3\cdot\frac{2}{3}a\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^3\right) = \boxed{ax\left(\frac{2}{3}a-\frac{3}{2}\right)^3.}$$

$$(4)\quad x^2+2xy+y^2-a^2+2ab-b^2 = x^2+2xy+y^2-(a^2-2ab+b^2) = (x+y)^2-(a-b)^2$$
$$= \Big((x+y)+(a-b)\Big)\Big((x+y)-(a-b)\Big) = \boxed{(x+y+a-b)(x+y-a+b).}$$

$$(5)\quad x^2-x-2 \xrightarrow[\text{«trinomio notevole» con } S=-1 \text{ e } P=-2]{} \boxed{(x-2)(x+1).}$$

$$(6)\quad \frac{x^3y^3}{8}+1 = \left(\frac{xy}{2}\right)^3+1^3 = \left(\frac{xy}{2}+1\right)\left(\left(\frac{xy}{2}\right)^2-\frac{xy}{2}\cdot 1+1^2\right)$$
$$= \boxed{\left(\frac{xy}{2}+1\right)\left(\frac{x^2y^2}{4}-\frac{xy}{2}+1\right).}$$

$$(7)\quad a^2y+4x^2y+9y+4axy-6ay-12xy = y(a^2+4x^2+9+4ax-6a-12x)$$
$$= y\Big(a^2+(2x)^2+(-3)^2+2\cdot a\cdot 2x+2\cdot a\cdot(-3)+2\cdot 2x\cdot(-3)\Big) = \boxed{y(a+2x-3)^2.}$$

**Quesito 2.** Ci appoggiamo al fatto, già dato da dimostrare per esercizio, che l'*unica* eventuale scomposizione possibile per un polinomio monico di secondo grado $x^2+hx+k$, con $h,k\in\mathbb{Q}$, è

$$(1)\quad x^2+hx+k = (x+p)(x+q),$$

con $p,q\in\mathbb{Q}$ tali che $p+q=h$ e $pq=k$. Per completezza, dimostriamo anche questo preliminare (non era necessario includere questa dimostrazione nella soluzione, per via del troppo tempo che ciò richiederebbe).

Poiché il grado di un prodotto è la somma dei gradi dei fattori, un polinomio di secondo grado può eventualmente scomporsi solo nel prodotto di due polinomi di primo grado. Pertanto, *se* il polinomio $x^2 + hx + k$ può essere scomposto in polinomi in $x$ a coefficienti razionali, la sua scomposizione dev'essere per forza del tipo

$$x^2 + hx + k = (ax + b)(cx + d), \tag{2}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. D'altra parte,

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + adx + bcx + bd, \tag{3}$$

e confrontando la (2) con la (3), si vede che deve per forza essere $ac = 1$, cioè $c = 1/a$. Allora la scomposizione (2) è in realtà

$$x^2 + hx + k = (ax + b)\left(\frac{1}{a}x + d\right)$$

che si può anche riscrivere nella forma

$$x^2 + hx + k = (ax + b)\left(\frac{1}{a}x + d\right) = a\left(x + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{1}{a}x + d\right) = \left(x + \frac{b}{a}\right)(x + ad),$$

e in definitiva come

$$x^2 + hx + k = (x + p)(x + q) \tag{4}$$

con $p$ e $q$ numeri razionali opportuni ($p = b/a,\ \ q = ad$). A questo punto, poiché

$$(x + p)(x + q) = x^2 + qx + px + pq = x^2 + (p + q)x + pq, \tag{5}$$

confrontando la (4) con la (5), si vede che deve per forza essere

$$p + q = h, \qquad\qquad pq = k;$$

la (1) è così dimostrata.

Tornando al nostro esercizio, proviamo a supporre che il polinomio $x^2 + 1$ *sia* scomponibile come richiesto nel quesito; abbiamo appena visto che, allora, la scomposizione deve *necessariamente* essere $x^2+1 = (x+p)(x+q)$, con $p, q \in \mathbb{Q}$ e

$$p + q = 0, \qquad\qquad pq = 1:$$

infatti, per il polinomio $x^2 + 1 = x^2 + 0x + 1$ si ha $h = 0$ e $k = 1$. La prima di queste due relazioni significa che $q = -p$, e allora la seconda diventa

$$p \cdot (-p) = 1, \qquad \text{cioè} \qquad -p^2 = 1 \qquad \text{cioè} \qquad p^2 = -1;$$

ma $p$ era un numero razionale, e non esistono numeri razionali il cui quadrato sia $-1$.

L'aver supposto che $x^2 + 1$ sia scomponibile come richiesto nel quesito ci ha condotto a una conseguenza assurda; la nostra supposizione deve dunque essere falsa. Pertanto, concludiamo che

$$\boxed{x^2 + 1 \textit{ non può} \text{ essere scomposto come richiesto nel quesito.}}$$